Mr : Zahaf Salem Zaghouan 09/02/2009 16:07:34

PROBABILLITE SUR UN EMSEMBLE FINI

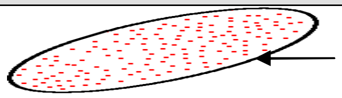
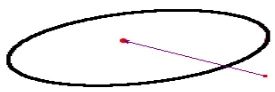
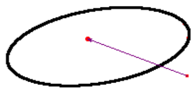
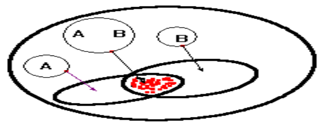
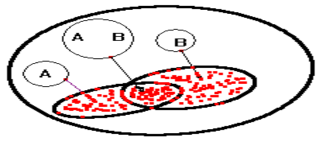
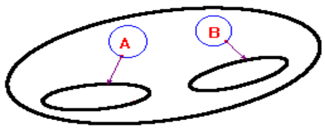
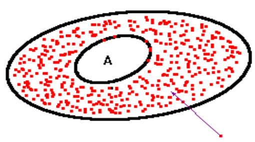
I/ RAPPELS :

1/ DENOMBREMENT :

Soient n et p deux entiers naturelles ; si on tire p jetons d'un sac qui contient n jetons

Type de tirage	simultané	Successif	
		Sans remise	Avec remise
Card (Ω)	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!.(n-p)!}$ $p \leq n$ Le nombre des parties de p éléments pris d'un ensemble à n éléments distincts.	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p \leq n$ Le nombre des p- uplets pris d'un ensemble à n éléments distincts.	n^p Le nombre d'application d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
Ordre	L'ordre n'intervient pas	On tient compte de l'ordre	On tient compte de l'ordre
Répétition	Sans répétition	Sans répétition	Avec répétition

2/ VOCABULAIRES :

Symboles	Graphique	Langage ensembliste	Langage probabiliste
Ω	 Ω	Ensemble global	Univers ; l'ensemble de tous les cas possibles
$\omega \in \Omega$	 ω	ω est un élément de Ω	ω est cas possible ou éventualité
$\{\omega\} \subset \Omega$	 { ω }	{ ω } est un singleton de Ω	{ ω } est un événement élémentaire
$A \subset \Omega$		A est une partie de Ω	A est un événement
$\varnothing \subset \Omega$		Ensemble vide	Evénement impossible
$A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$		A ∩ B est l'ensemble d'intersection de A et B	A ∩ B est l'événement (A et B)
$A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$		A ∪ B est l'ensemble réunion de A et B	A ∪ B est l'événement (A ou B)
$A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ Tel que : $A \cap B = \varnothing$		A et B sont deux ensembles disjoints	A et B événements incompatibles
$A \subset \Omega$	 $\overline{A}$	C_Ω^A noté aussi $\overline{A}$ ensemble complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$ est l'événement contraire de A

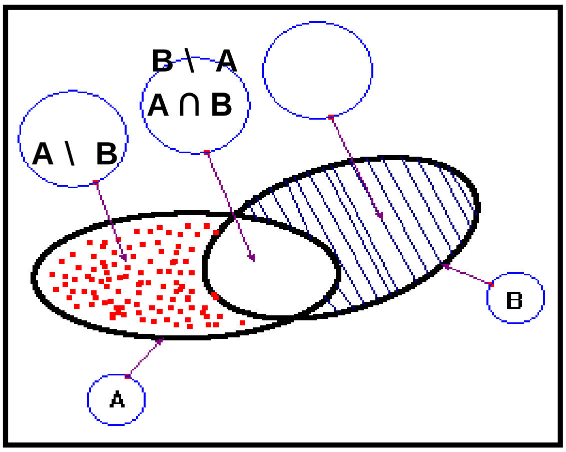
1/ DEFINITION : Soit Ω un ensemble fini. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application P définie par :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \text{ vérifiant :}$$

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $A \cap B = \emptyset$ on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2/ PROPRIETES :



- $P(\emptyset) = 0$

Soient A et B deux événements. On a :

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3/ EQUIPROBABILITE :

a/ <u>Définition :</u>

Soit $(\Omega ; \mathcal{P}(\Omega) ; P)$ un espace probabilisé

On dit que P une probabilité uniforme ou équiprobabilité si et seulement si tous les événements élémentaires ont la même probabilité (sont équiprobable)..

b/ <u>Propriétés :</u> Soit $(\Omega ; \mathcal{P}(\Omega) ; P)$ un espace probabilisé ;

On pose Card (Ω) = n ($n \in \mathbb{N}^*$) . Si P une probabilité uniforme alors on a :

- Pour tout événement élémentaire { ω }, on aura : $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}$
- Pour tout événement $A \subset \Omega$; on a: $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

<u>Remarque :</u> Chaque fois qu'on dit « on tire au hasard » cela signifie que l'univers Ω est muni d'une probabilité uniforme.

4/ PROBABILITE CONDITIONNELLE – EVENEMENTS INDEPENDANTS :

<u>a/ Définition :</u> Soit $(\Omega ; \mathcal{P}(\Omega) ; P)$ un espace probabilisé ; B un événement de probabilité non nulle et A un événement quelconque. On appelle probabilité de A sachant B le réel noté et définie par : $P_B(A) = P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . .

<u>b/ Propriétés :</u> soient A ;B et C trois événements de Ω tel que $B \cap C = \emptyset$

- si A et B sont des événements de E tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(A / B).P(B) = P(B / A).P(A) .$$

- $P(\Omega / A) = 1$
- $P((B \cup C) / A) = P(B / A) + P(C / A)$
- si A et B sont incompatibles alors $P(B / A) = 0$

<u>c/ événements indépendants :</u>

Soient A et B deux événements de Ω.

On dit que A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Dans le cas ou $P(B) \neq 0$ on obtient : $P(A|B) = P(A)$.
- Dans le cas ou $P(A) \neq 0$ on obtient : $P(B|A) = P(B)$.

5/ FORMULE DES PROBABILITES TOTALES.

1) Partition de l'univers

Définition : soit Ω un univers et n un entier tel que $n \geq 2$.

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une partition de Ω si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ces événements n'est impossible ;
- ces événements sont incompatibles deux à deux ;
- la réunion de ces événements est l'univers Ω.

2) Formule des probabilités totales

Propriété : soit Ω un univers muni d'une loi de probabilité P, et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de Ω. Pour tout événement B de Ω, on a :

$$\boxed{P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \dots\dots\dots\dots + P(A_n).P(B/A_n)}$$

Exemple : pour n = 3

$$\boxed{B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)}$$

B est la réunion de trois événements incompatibles deux à deux. Donc

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + P(A_3).P(B/A_3)$

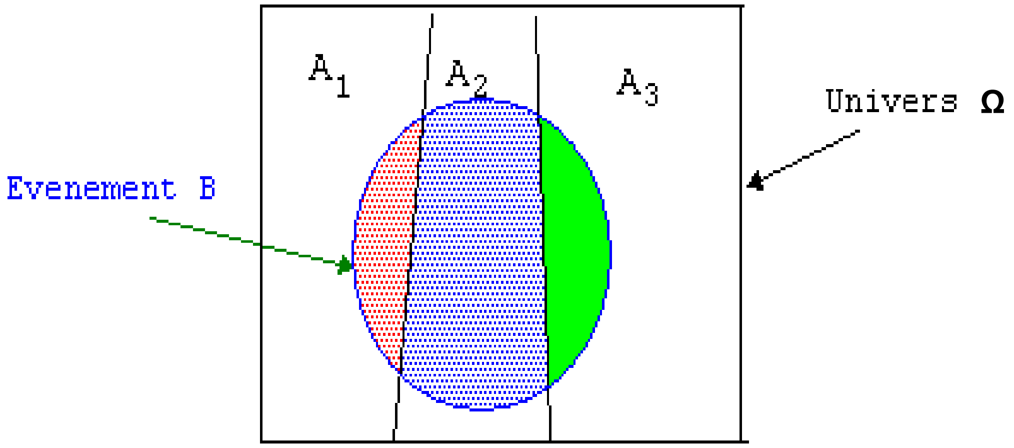


Illustration par un arbre pondéré :